Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 11 im Wintersementer 2020/21 (am 22.01.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

12. Die Jordan-Zerlegung III

12.6 Folgerung: die multiplikative Jordan-Zerlegung

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $a \in \mathbf{GL}(V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau ein Paar (a_s, a_u) von Elementen aus $\mathbf{GL}(V)$ mit folgenden Eigenschaften.

1. a_s ist halbeinfach und a_u ist unipotent.
2. $a = a_s \cdot a_u = a_u \cdot a_s$. (multiplikative Jordan-Zerlegung)

(ii) Sei $W \subseteq V$ eine a-stabiler k-linearer Unterraum von V. Dann ist W auch stabil unter a_s und a_u und

$$a|_W = a_s|_W \cdot a_u|_W$$

ist die multiplikative Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W.

Seien $\bar{a}$, $\bar{a}_s$ und $\bar{a}_u$ die durch a, a_s bzw. a_u induzierten k-linearen Abbildungen auf dem Faktorraum $\bar{V} = V/W$. Dann ist

$$\bar{a} = \bar{a}_s \cdot \bar{a}_u$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$.

(iii) Seien ϕ: $V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen und $b \in \mathrm{End}(W)$ ein Element, für welches das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "a"'] & W \arrow[d, "b"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dann sind auch die Diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "a_s"'] & W \arrow[d, "b_s"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "a_u"'] & W \arrow[d, "b_u"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Bemerkung

Wir nennen a_s und a_u den <u>halbeinfachen</u> (bzw. <u>unipotenten</u>) <u>Teil</u> von $a \in \mathbf{GL}(V)$.

Beweis. Der Beweis ist im wesentlichen eine Übersetzung der Aussagen zur additiven Jordan-Zerlegung. Wir beschränken uns hier darauf zu beschreiben, wie man aus einer additiven Jordan-Zerlegung

$$a = a_s + a_n \tag{1}$$

für den Fall umkehrbarer Endomorphismen a eine multiplikative Zerlegung erhält und umgekehrt, wie man aus einer multipikativen Zerlegung

$$a = a_s \bullet a_u \tag{2}$$

eine additive erhält. Die Ableitung der obigen Aussagen aus den Eigenschaften additiver Zerlegungen ist dann recht einfach, so daß wir darauf verzichten. Die Details kann man im Vorlesungsskript nachlesen.

Nach der zweiten Bemerkung zur additiven Jordan-Zerlegung (Vorlesung 10) gilt

$$\det a = \det a_s.$$

Ist a umkehrbar, so gilt dasselbe also auch für a_s. Aus der Zerlegung (1) erhält man deshalb (2) mit

$$a_u = 1 + a_s^{-1} \bullet a_n. \tag{3}$$

Weil a_s und a_n kommutieren, gilt dasselbe für a_s^{-1} und a_n. Mit a_n ist deshalb auch

$$a_u - 1 = a_s^{-1} \bullet a_n$$

nilpotent, d.h. a_u ist unipotent. Weil a_s, a_s^{-1} und a_n kommutieren, kommutieren auch a_s und (3). Die erhaltene Zerlegung (2) ist also tatsächlich eine multiplikative Jordan-Zerlegung im Sinne von Aussage (i).

Umgekehrt erhält man aus der multiplikativen Jordan-Zerlegung (2) eine additive, indem man (2) in der Gestalt

$$a = a_s \bullet a_u = a_s \bullet (1 + a_u - 1) = a_s + a_s \bullet (a_u - 1) = a_s + a_n$$

schreibt mit

$$a_n = a_s \bullet (a_u - 1). \tag{4}$$

Weil a_s und a_u kommutieren, ist a_n nilpotent und kommutiert mit a_s, d.h. man erhält tatsächlich eine additive Jordan-Zerlegung. Die durch (3) und (4) definierten Abbildungen

$$a_n \mapsto a_u \text{ und } a_u \mapsto a_n$$

sind für fest gewähltes umkehrbares a_s invers zueinander.

QED.

12.7 Folgerung: Verträglichkeit mit direkten Summen undTensorprodukten

Seien V und W endlich-dimensionale k-Vektorräume, a und b lineare Automorphismen von V bzw. W,

$$a \in GL(V),\ b \in GL(W),$$

und

$$a = a_s a_u \text{ und } b = b_s b_u$$

deren multiplikative Jordan-Zerlegungen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $a \oplus b = (a_s \oplus b_s) \bullet (a_u \oplus b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a \oplus b \in GL(V \oplus W)$.

(ii) $a\otimes b = (a_s\otimes b_s)\bullet(a_u\otimes b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b\in GL(V\otimes W)$.
Beweis. siehe das Vorlesungsskript zu Kapitel 2.
QED.

12.8 Verallgemeinerung auf den lokal endlichen Fall

Sei V ein nicht notwendig endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Wir bezeichnen auch in dieser Situation mit

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{End}_k(V)$$

die k-Algebra der linearen Endomorphismen von V und mit

$$\mathbf{GL}(V) := \mathbf{GL}_k(V) := \mathrm{End}(V)^* = \mathrm{Aut}_k(V)$$

die Einheitengruppe End(V)* des Rings End(V), d.h. Gruppe der k-linearen Automorphismen von V.
Ein Element

$$a \in \mathrm{End}(V)$$

heißt lokal endlich, wenn V Vereinigung von endlich-dimensionalen a-stabilen linearen Unterräumen ist.
Sei a ein lokal endlicher linearer Endomorphismus von V. Dann heißt a halbeinfach (bzw. lokal nilpotent bzw. lokal unipotent), wenn die Einschränkung von a auf einen beliebigen a-stabilen linearen Unterraum von endlicher Dimension halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent) ist.

Bemerkungen

(i) Ein linearer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann halbeinfach im Sinne der hier angegebenen neuen Definition, wenn er es im Sinne der alten ist.

(ii) Es gilt sogar mehr: ist $a : V \longrightarrow V$ ein lokal endlicher linearer Endomorphismus des nicht notwendig endlich-dimenensionalen k-Vektorraums V, welcher halbeinfach im Sinne der neuen Definition ist, so zerfällt V in eine direkte Summe von Eigenräumen von a, d.h. es gilt

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_{\lambda_i} \text{ mit } V_\lambda := \{x \in V \mid a(x) = \lambda\bullet x \}.$$

Dabei sei $\{ \lambda_i\}_{i\in I}$ die Familie der Elemente $\lambda\in k$, für welche $V_\lambda \neq 0$ ist.

(iii) Sei $a \in \mathrm{End}(V)$ ein lokal endlicher Endomorphismus des nicht notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Dann gibt es genau eine Darstellung von a,

$$a = a_s + a_n, \qquad (1)$$

als Summe von zwei lokal endlichen linearen Endomorphismen mit

1. a_s ist halbeinfach und a_n ist lokal nilpotent.
2. $a_s\bullet a_n = a_n\bullet a_s$.

Auch in dieser Situation heißt (1) additive Jordan-Zerlegung.

(iv) Seien

$$a, a', a'' \in \mathrm{End}(V)$$

Endomorphismen des nicht notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V mit

$$a = a' + a'' \text{ und a lokal endlich.}$$

Dann sind folgenden Aussagen äquivalent.

1. $a = a'+a''$ ist die additive Jordan-Zerlegung von a.
2. Für jeden endlich-dimensionalen k-linearen und a-stabilen Unterraum $W\subseteq V$ ist

$$a|_W = a'|_W + a''|_W$$

die additive Jordan-Zerlegung von $a|_W$. Insbesondere ist W auch a'-stabil und a''-stabil.

Beweis der Bemerkungen. Zu (i). trivial.

Zu (ii). Sei a: V $\longrightarrow$ V ein linearer Endomorphismus des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V und W $\subseteq$ V ein a-stabiler linearer Unterraum.

Ist a halbeinfach in Sinne der alten Definition, so hat die additive Jordan-Zerlegung von a die Gestalt

$$a = a_s + 0.$$

Nach 2.4.4 (iii) ist

$$a|_W = a_s|_W + 0|_W$$

die additive Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W. Insbesondere ist $a|_W$ halbeinfach in Sinne der alten Definition. Weil dies für jeden a-stabilen Unterraum W von V gilt, ist a halbeinfach im Sinne der neuen Definition.

Sei jetzt umgekehrt a halbeinfach im Sinne der neuen Definition. Weil V als Unterraum von sich selbst endlich-dimensional ist, ist dann

$$a = a|_V$$

halbeinfach in Sinne der alten Definition.

Damit ist der erste Teil der Aussage von (ii) bewiesen. Befassen wir uns mit dem zweiten. Sei a: V $\longrightarrow$ V ein lokal endlicher k-linearer und halbeinfacher Endomorphismus des nicht-notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Wir haben zu zeigen, V zerfällt in eine direkte Summe der Eigenräume V_{λ_i}.

1. Schritt. $V = \sum_{i\in I} V_{\lambda_i}$.

Es reicht zu zeigen, jeder von 0 verschiedene Vektor v $\in$ V - {0} ist eine Summe von Eigenvektoren. Weil a lokal endlich ist, liegt v in einem endlich-dimensionalen a-stabilen Unterraum von V, sagen wir

$$v \in W,\ \dim_k W < \infty \text{ und } a(W) \subseteq W.$$

Weil a halbeinfach in Sinne der neuen Definition sein soll, ist $a|_W$ halbeinfach im Sinne der alten Definiton, d.h. v ist Summe von Eigenvektoren von $a|_W$ und damit auch von a.

2. Schritt. Die Summe des ersten Schritts ist direkt.

Nach dem ersten Schritt ist jeder Vektor

$$v \in V - \{0\}$$

Summe von endlich vielen Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Wir haben zu zeigen, diese Darstellung ist eindeutig.

Angenommen, sie ist es nicht. Dann gibt es eine Summe von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten (mit mindestens zwei Summanden), welche gleich 0 ist, sagen wir

$$v_1 + ... + v_r = 0 \text{ mit } a(v_i) = \mu_i \cdot v_i \text{ und paarweise verschiedenen } \mu_i. \qquad (3)$$

Wir haben zu zeigen, dies ist unmöglich. Dabei können wir annehmen, daß r ≥ 2 minimal gewählt ist. Die μ_i sind dann automatisch von 0 verschieden.

Aus (3) können wir zwei weitere Identitäten gewinnen, indem wir zum einen a auf (3) anwenden und zum andern (3) mit μ_1 multiplizieren. Wir erhalten

$$\mu_1\cdot v_1 + \mu_2\cdot v_2 + \dots + \mu_r\cdot v_r = 0$$

$$\mu_1\cdot v_1 + \mu_1\cdot v_2 + \dots + \mu_1\cdot v_r = 0$$

Wir bilden die Differenz und erhalten

$$(\mu_2 - \mu_1)\cdot v_2 + \dots + (\mu_r - \mu_1)\cdot v_r = 0$$

im Widerspruch zur Minimalität von r. Die Darstellung ist somit eindeutig und die Summe des ersten Schritts ist direkt.

Zu (iii) und (iv). Sei $a: V \longrightarrow V$ ein lokal endlicher k-linearer Endomorphismus. Wir haben die linearen Endomorphismen $a_s, a_n: V \longrightarrow V$ zu definieren Sei

$$v \in V - \{0\}.$$

Weil a lokal endlich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ mit

$$\dim_k W < \infty,\ a(W) \subseteq W \text{ und } v \in W.$$

Wir betrachten die additive Jordan-Zerlegung

$$a|_W = (a|_W)_s + (a|_W)_n$$

und setzen

$$a_s(v) := (a|_W)_s(v) \text{ und } a_n(v) := (a|_W)_n(v). \tag{4}$$

1. Schritt. Die Definitionen sind korrekt (d.h. unabhängig von der spezielen Wahl des endlich-dimensionalen Unterraums W).

Seien W' ein weiterer k-linearer Unterraum von V mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'$$

und

$$a|_{W'} = (a|_{W'})_s + (a|_{W'})_n$$

die additive Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W'. Dann gilt auch

$$\dim_k W\cap W' < \infty,\ a(W\cap W') \subseteq W\cap W' \text{ und } v \in W\cap W'.$$

Nach 2.4.4 (iii) können wir die additive Jordan-Zerlung der Einschränkung von a auf $W\cap W'$ dadurch erhalten, daß wir zumächt auf W und dann auf $W\cap W'$ einschränken,

$$a|_{W\cap W'} = (a|_W)_s|_{W\cap W'} + (a|_W)_n|_{W\cap W'}.$$

Wir können aber auch erst auf W' und dann auf $W\cap W'$ einschränken,

$$a|_{W\cap W'} = (a|_{W'})_s|_{W\cap W'} + (a|_{W'})_n|_{W\cap W'}.$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung erhalten wir

$$(a|_W)_s|_{W\cap W'} = (a|_{W\cap W'})_s = (a|_{W'})_s|_{W\cap W'}$$

und

$$(a|_W)_n|_{W\cap W'} = (a|_{W\cap W'})_n = (a|_{W'})_n|_{W\cap W'}.$$

Wegen $v \in W\cap W'$ folgt

$$(a|_W)_s(v) = (a|_{W'})_s(v) \text{ und } (a|_W)_n(v) = (a|_{W'})_n(v).$$

Die Definition von $a_s(v)$ und $a_n(v)$ ist damit unabhängig von der speziellen Wahl des Unterraums W.

Bemerkkungen.

1. Im ersten Schritt wurde eine Zerlegung $a = a' + a''$ konstruiert, welche der Bedingung 2 von Bemerkung (iv) genügt.
2. Zum Beweis von Bemerkung (iii) reicht es zu zeigen, eine Zerlegung, welche der Bedingung 2 von Bemerkung (iv) genügt, ist eine Jordan-Zerlegung im Sinne von Bemerkung (iii). Damit ist automatisch auch die Implikation $2 \Rightarrow 1$ von (iv) bewiesen.
3. Ist $a = a'+a''$ eine Zerlegung wie in Bedingung 1 von (iv), so können wir wie im ersten Schritt eine ebensolche Zerlegung konstruieren, welche gleichzeitig der Bedingung 2 genügt. Auf Grund der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung stimmen die beiden Zerlegungen überein. Damit genügt auch die vorgegebene Zerlegung $a = a'+a''$ der Bedingung 2, d.h. es besteht die Implikation $1 \Rightarrow 2$.
4. Der Beweis der Bemerkungen (iii) und (iv) ist damit auf den Beweis der in 2. beschriebenen Aussagen reduziert (einschließlich der Eindeutigkeitsaussage von (iii)).

2. <u>Schritt</u>. Falls die Zerlegung $a = a' + a''$ von Bemerkung (iv) der Bedingung 2 genügt, so gilt $a'\circ a'' = a''\circ a'$, a' ist halbeinfach und a'' ist lokal nilpotent.

Beweisen wir zunächst, daß a' und a'' kommutieren. Sei $v \in V$. Weil a lokal endlich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ mit

$$\dim_k W < \infty,\ a(W) \subseteq W \text{ und } v \in W.$$

Nach Voraussetzung ist

$$a|_W = a'|_W + a''|_W$$

die additive Jordan-Zerlegung von $a|_W$. Insbesondere gilt $a'(W)\subseteq W$, $a''(W)\subseteq W$ und

$$(a'|_W)\circ(a''|_W) = (a''|_W)\circ(a'|_W).$$

Also ist

$$(a'\circ a'')(v) = a'(a''(v)) = a'|_W(a''|_W(v)) = a''|_W(a'|_W(v)) = (a''\circ a')(v).$$

Weil v ein beliebiger Vektor von V ist, gilt $a'\circ a'' = a''\circ a'$ wie behauptet.

Wir haben noch zu zeigen, a' ist halbeinfach und a'' ist lokal nilpotent. Seien W' und W'' zwei k-lineare Unterräume von V endlicher Dimension mit

$$a'(W') \subseteq W' \text{ und } a''(W'') \subseteq W''.$$

Wir haben zu zeigen, $a'|_{W'}$ ist halbeinfach und $a''|_{W''}$ ist nilpotent.
Weil a lokal endlich ist, gibt es einen endlich-dimensionalen und a-stabilen k-linearen Unterraum $W\subseteq V$ mit

$$W' \subseteq W \text{ und } W'' \subseteq W.$$

Nach Voraussetzung ist

$$a|_W = a'|_W + a''|_W$$

die Jordan-Zerlegung von $a|_W$. Insbesondere ist $a'|_W$ halbeinfach und $a''|_W$ nilpotent.
Mit $a''|_W$ ist auch

$$a''|_{W''} = (a''|_W)|_{W''} \text{ nilpotent.}$$

Wir haben noch zu zeigen, $a'|_{W'}$ ist halbeinfach. Weil $a'|_W$ halbeinfach ist, zerfällt W in eine direkte Summe von Eigenräumen, sagen wir

$$W = W_1\oplus...\oplus W_r\ .$$

Dabei sei W_i der Eigenraum von $a'|_W$ zum Eigenwert λ_i.

Wegen $W' \subseteq W$ ist jeder Vektor aus W' eine Summe von Elementen der Räume W_i.
Zum Beweis der Halbeinfachheit von W' reicht es zu zeigen, W' wird von gewissen Elementen der Räume W_i erzeugt. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann gibt es ein Element $w' \in W'$ der Gestalt

$$w' = v_{i_1} + ... + v_{i_r} \in W' \text{ mit } v_{i_\nu} \in W_{i_\nu} - W' \text{ für } \nu = 1,...,r. \qquad (5)$$

Es gilt dann insbesondere,

$$r \ge 2.$$

Wir können w' außerdem noch so wählen, dar r minimal wird. Die zu den v_{i_ν} gehörigen Eigenwerte λ_{i_ν} sind dann ungleich 0,

$$\lambda_{i_\nu} \neq 0 \text{ für } \nu = 1,...,r,$$

denn andernfalls könnte man a' auf das Element (5) anwenden und so ein Element aus W' mit kleinerem r gewinnen. Aus (5) können wir zwei neue Elemente von W' erhalten, indem wir zum einen mit λ_{i_1} multiplizieren und zum anderen die Abbildung a' anwenden:

$$\lambda_{i_1} \bullet w' = \lambda_{i_1} \bullet v_{i_1} + \lambda_{i_1} \bullet v_{i_2} ... + \lambda_{i_1} \bullet v_{i_r} \in W'$$

$$a'(w') = \lambda_{i_1} \bullet v_{i_1} + \lambda_{i_2} \bullet v_{i_2} ... + \lambda_{i_r} \bullet v_{i_r} \in W'.$$

Die Differenz ist ein Element

$$a'(w') = (\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2}) \bullet v_{i_2} ... + (\lambda_{i_1} - \lambda_{i_r}) \bullet v_{i_r} \in W'.$$

ist ein Element mit denselben Eigenschaften wie w' aber mit einem um 1 verkleinerten r. Das widerspricht der Mininmalität von r. Es kann also kein Element der Gestalt (5) in W' geben, d.h. W' wird von Eigenvektoren von a' erzeugt. Wir haben gezeigt $a'|_W$, ist halbeinfach.

Wir haben noch die <u>Eindeutigkeitsaussage von Bemerkung</u> (iii) zu beweisen.
Sei

$$a = a'_s + a'_n$$

eine weitere Zerlegung wie in (iii) neben der soeben konstruierten (mit a'_s halbeinfach, a'_n lokal nilpotent und $a'_s \bullet a'_n = a'_n \bullet a'_s$) Wir haben zu zeigen,

$$a_s = a'_s \text{ und } a_n = a'_n.$$

4. <u>Schritt</u>. a'_s kommutiert mit a.
Weil a'_s und a'_n miteinander kommutieren, gilt:

$$\begin{aligned} a \bullet a'_s &= (a'_s + a'_n) \bullet a'_s \\ &= a'^2_s + a'_n \bullet a'_s \\ &= a'^2_s + a'_s \bullet a'_n \\ &= a'_s \bullet (a'_s + a'_n) \end{aligned}$$

$= a'_s \cdot a$

5. Schritt. $a_s = a'_s$ und $a_n = a'_n$.

Sei $v \in V - \{0\}$ vorgegeben. Weil a'_s lokal endlich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum W von V mit

$$\dim_k W < \infty, a'_s(W) \subseteq W, v \in W.$$

Weil W endlich-dimensional ist und a lokal endlich, gibt es einen k-linearen Unterraum W' von V mit

$$\dim_k W' < \infty, a(W') \subseteq W', W \subseteq W'.$$

Weil a und a'_s kommutieren, gilt für i = 1,2,3,...

$$a'_s(a^i(W)) = a^i(a'_s(W)) \subseteq a^i(W) \qquad (\subseteq a^i(W') \subseteq W'),$$

d.h. $a^i(W)$ ist für jedes i ebenfalls a'_s-stabil. Damit ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i(W) \qquad (\subseteq W')$$

ein a'_s-stabiler Unterraum, der als Unterraum von W' endlich-dimensional und der nach Defintion a-stabil ist. Wir können also W durch diese Summe ersetzen und annehmen,

W ist a'_s- und a-stabil

Dann ist W aber auch stabil bezüglich $a'_n = a - a'_s$ und als a-stabiler Raum nach Konstruktion der Zerlegung $a = a_s + a_n$ im ersten Schritt auch stabil bezüglich a_s und a_n. Zusammen erhalten wir:

W ist stabil bezüglich a, a_s, a_n, a'_s, a'_n (und es gilt $v \in W$).

Damit sind

$$a|_W = a_s|_W + a_n|_W \text{ und } a|_W = a'_s|_W + a'_n|_W$$

zwei Jordan-Zerlegungen desselben Endomorphismus auf dem endlich-dimensionalen Raum W. Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung im endlich-dimensionalen Fall, folgt

$$a_s|_W = a'_s|_W \text{ und } a_n|_W = a'_n|_W.$$

und insbesondere

$$a_s(v) = a'_s(v) \text{ und } a_n(v) = a'_n(v).$$

Das dies für jedes $v \in V$ gilt, folgt

$$a_s = a'_s \text{ und } a_n = a'_n.$$

QED.

Index

Inhalt